فصل

۱۷

بار الکتریکی

بخش ۱۷-۴ قانون کولن

●۱- SSM ILW از بار Q که در ابتدا روی کرهٔ کوچکی است، یک جزء q به کرهٔ دیگری که در نزدیکی آن واقع است منتقل می‌شود. هر دو کره را می‌توان به صورت ذره در نظر گرفت. نیروی الکتروستاتیکی میان دو کره به ازای چه مقداری از q/Q بیشینه است؟

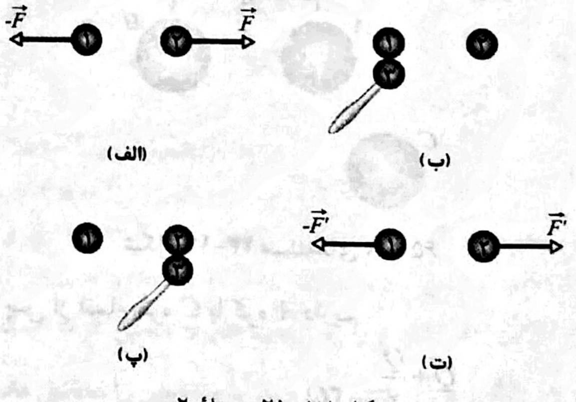
حل:

$$F = k\frac{q(Q-q)}{r^2} = \frac{k(qQ-q^2)}{r^2}$$

بیشینه F از رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\frac{dF}{dq} = 0 \Rightarrow Q - 2q = 0 \Rightarrow \frac{q}{Q} = \frac{1}{2}$$

●۲- کره‌های رسانای منزوی مشابه ۱ و ۲ بارهای یکسانی دارند و در فاصله‌ای از هم قرار گرفته‌اند که در مقایسه با قطر آنها زیاد است، (شکل ۱۷-۲۱ الف). نیروی الکتروستاتیکی که از سوی کرهٔ ۱ بر کرهٔ ۲ وارد می‌شود $\vec{F}$ است. حال فرض کنید که کرهٔ مشابه سوم ۳، که دارای دستگیره‌ای عایق و در ابتدا خنثی است، نخست با کرهٔ ۱ (شکل ۱۷-۲۱ ب)، سپس با کرهٔ ۲ (شکل ۱۷-۲۱ پ) تماس پیدا کند، و سرانجام برداشته شود (شکل ۱۷-۲۱ ت). بزرگی نیروی الکتروستاتیکی F' که اینک بر کرهٔ ۲ وارد می‌شود چقدر است؟ نسبت F'/F چیست؟



شکل ۱۷-۲۱ مسئلهٔ ۲

حل: وقتی کره‌ی ۳ با کره‌ی ۱ تماس می‌یابد. بار این دو کره با یکدیگر برابر می‌شود. بنابراین کره‌ی ۱ بعد از جدایی از کره‌ی ۳ دارای بار $\frac{q}{2}$ است. بار کره‌ی ۳ نیز $\frac{q}{2}$ است. هنگامی که کره‌ی ۳ با بار $\frac{q}{2}$ با کره‌ی ۱ با بار q تماس پیدا می‌کند، این دو کره بعد از تماس دارای بارهای مساوی هستند که اندازه‌ی آن برابر است با:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q + q/2}{2} = \frac{3}{4}q$$

بنابراین نیروی بیان کره‌ی ۱ و ۲ در حالت نهایی برابر است با:

$$F' = k\frac{q_1' q_2'}{r^2} = k\frac{\left(\frac{3}{4}q\right)\left(\frac{1}{2}q\right)}{r^2} = \frac{3}{8}k\frac{q^2}{r^2} = 3F$$

$$\Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{3}{8} = 0/375 \Rightarrow F' = 0/375F$$

●۳- SSM برای آن که بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو بار نقطه‌ای $q_1 = 26/0\mu C$ و $q_2 = -47/0\mu C$ برابر با $5/70N$ باشد، فاصلهٔ بین آنها باید چقدر باشد؟

حل:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{F}}$$

$$= \sqrt{\frac{(9\times10^9)(26\times10^{-6})(47\times10^{-6})}{5/7}} = 1/39m$$

●۴- [redacted] در ضربهٔ برگشتی حاصل از تخلیهٔ یک آذرخش نوعی، جریان $2/5\times10^{-4}$ A به مدت ۲۰ μs به وجود می‌آید. در این رویداد چقدر بار منتقل می‌شود؟

حل: $q = It = (2/5\times10^{-4})(20\times10^{-6}) = 0/5C$

●۵- ذره‌ای با بار $+3/00\times10^{-6}$ C در فاصلهٔ ۱۲/۰ cm از ذرهٔ دیگری با بار $-1/50\times10^{-6}$ C قرار دارد. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو ذره را محاسبه کنید.

حل:

$$F = k\frac{q_1q_2}{r^2} \Rightarrow F = 9\times10^9\frac{(3\times10^{-6})(1/5\times10^{-6})}{(12\times10^{-2})^2} = 2/8N$$

چون بار دو ذره مخالف هم است، بنابراین نیرو جاذبه است.

●۶- ILW دو ذره با بار یکسان در فاصلهٔ $3/2\times10^{-3}$ m از یکدیگر نگه داشته شده و سپس از حال سکون رها می‌شوند. مشاهده می‌شود که شتاب اولیهٔ ذرهٔ اول $7/0 m/s^2$ و شتاب اولیهٔ ذرهٔ دوم $9/0m/s^2$ است. اگر جرم ذرهٔ اول $6/3\times10^{-7}$ kg باشد، (الف) جرم ذرهٔ دوم و (ب) بزرگی بار هر ذره چقدر است؟

حل: (الف) می‌دانیم نیرویی که این دو ذره به یکدیگر وارد می‌کنند با هم برابر ولی در جهت مخالف است.

$$F_1 = F_2 \Rightarrow m_1a_1 = m_2a_2 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1a_1}{a_2} = \frac{(6/3\times10^{-7})(7)}{9}$$

$$= 4/9\times10^{-7} kg$$

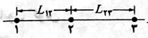
(ب)

$$F_1 = m_1a_1 \ , \ F_1 = k\frac{q_1q_2}{r^2} = k\frac{q^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{r^2m_1a_1}{k} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{(3/2\times10^{-3})^2(6/3\times10^{-7})(7)}{9\times10^9}}$$

$$= 7/1\times10^{-11} C$$

●●۷- در شکل ۱۷-۲۲ سه ذرهٔ باردار روی محور x قرار دارند. ذره‌های ۱ و ۲ در مکان خود ثابت‌اند. ذرهٔ ۳ می‌تواند حرکت کند، ولی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از طرف ذره‌های ۱ و ۲ در جایی برابر صفر است. اگر $L_{23} = L_{12}$ باشد؛ نسبت q_1/q_2 چقدر است؟



شکل ۱۷-۲۲ مسئله‌های ۷ و ۴۰

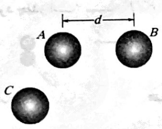
حل:

$$F_{31} = F_{32} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3q_1}{(L_{12}+L_{23})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3q_2}{(L_{23})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{2L_{12}}{L_{12}}\right)^2 = 4$$

کاملاً روشن است که بار q_1 و q_2 مختلف‌العلامت هستند.

●●۸- در شکل ۱۷-۲۳، سه کرهٔ رسانای مشابه دارای این بارهای اولیه هستند: کرهٔ A، $4Q$ ؛ کرهٔ B، $-6Q$ ؛ و کرهٔ C، ۰ . کره‌های A و B در جای خود ثابت‌اند و در فاصلهٔ مرکز به مرکزی بسیار بزرگتر از اندازهٔ کره‌ها قرار دارند. دو آزمایش انجام می‌گیرد. در آزمایش ۱، کرهٔ C به کرهٔ A و سپس (به طور جداگانه) به کرهٔ B تماس داده شده و از هم جدا می‌شوند. در آزمایش ۲، که با همان شرایط اولیه صورت می‌گیرد، مرحله‌ها وارونه می‌شوند: کرهٔ C به کرهٔ B و سپس (به طور جداگانه) به کرهٔ A تماس داده شده و از هم جدا می‌شوند. نسبت نیروی الکتروستاتیکی بین A و B در پایان آزمایش ۲ به مقدار آن در پایان آزمایش ۱ چقدر است؟



شکل ۱۷-۲۳ مسئله‌های ۸ و ۶۵

حل: پس از اتمام کره C با کره A داریم

$$q_A = q_C = \frac{Q + \frac{Q}{2}}{2} = \frac{3Q}{4}$$

حال کره C را با کره B تماس می‌دهیم، داریم:

$$q_B = q_C = \frac{\frac{-Q}{4} + \frac{3Q}{4}}{2} = \frac{Q}{4}$$

در نتیجه نیروی بین کره‌های A و B برابر است با

$$F = (9\times10^9)\frac{\left(\frac{3Q}{4}\right)\left(\frac{Q}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4/69\times10^{-19} N$$

●●۹- SSM WWW دو کرهٔ رسانای مشابه، که در جایی ثابت شده‌اند، هنگامی که فاصلهٔ جدایی مرکز به مرکز آنها برابر ۵۰/۰cm است، با نیروی الکتروستاتیکی ۰/۱۰۸N یکدیگر را می‌ربایند. سپس کره‌ها توسط سیم رسانای نازکی به هم متصل می‌شوند. وقتی که سیم برداشته شود، کره‌ها یکدیگر را با نیروی الکتروستاتیکی ۰/۰۳۶۰N می‌رانند. از بارهای اولیهٔ روی کره‌ها، که مجموع آنها مقدار مثبتی است، (الف) چه مقدار بار منفی روی یکی از آنها و (ب) چه مقدار بار مثبت روی دیگری قرار داشته است؟

حل: بار کره‌ی اول q_1 و بار کره‌ی دوم q_2 است. بعد از تماس بار دو کره با یکدیگر برابر می‌شود. در این حالت داریم:

$$q_1' = q_2' = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

$$F = k\frac{q_1q_2}{r_2} \ , \ F' = k\frac{q_1'q_2'}{r^2}$$

با استفاده از نیروی F' ، $(q_1 + q_2)$ را می‌یابیم.

$$0/036 = 9\times10^9\frac{(q_1+q_2)^2}{4(0/5)^2} \Rightarrow (q_1+q_2) = \pm2\times10^{-6} C \qquad (1)$$

می‌توان دو حالت $q_1 + q_2 > 0$ و $q_1 + q_2 < 0$ را در نظر گرفت. برای حالت $q_1 + q_2 > 0$ داریم:

$$q_1 + q_2 = 2\times10^{-6} C \Rightarrow q_2 = 2\times10^{-6} - q_1 \qquad (2)$$

از طرفی می‌توانیم مقدار q_1q_2 را از نیروی F بیابیم:

$$F = k\frac{q_1q_2}{r^2} = 9\times10^9\frac{q_1q_2}{(0/5)^2} = 0/108$$

$$\Rightarrow q_1q_2 = -3\times10^{-12} C^2$$

از آنجا که بار دو کره در حالت اول مخالف هم است، علامت منفی برای حاصل بالا در نظر گرفته شد. اگر این شرط را با روابط ۱ و ۲ با هم در نظر بگیریم، به معادله‌ی درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$q_1^2 - 2\times10^{-6}q_1 - 3\times10^{-12} = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = 3\times10^{-6} C \ , \ q_1 = -1\times10^{-6} C$$

اگر $q_1 = 3\times10^{-6} C$ باشد، آنگاه $q_2 = -1\times10^{-6} C$ و اگر $q_1 = -1\times10^{-6} C$ باشد، آنگاه $q_2 = 3\times10^{-6} C$ است.

برای حالتی که $q_1 + q_2 < 0$ باشد، حل به همین گونه است.

●●۱۰- GO در شکل ۱۷-۲۴، چهار ذره مربعی را تشکیل داده‌اند. بارها عبارت‌اند از $q_1 = q_4 = Q$ و $q_2 = q_3 = q$. (الف) اگر نیروی الکترواستاتیکی خالص وارد بر ذره‌های ۱ و ۳ برابر صفر باشد، نسبت Q/q چقدر است؟ (ب) آیا هیچ مقداری از q وجود دارد که نیروی الکترواستاتیکی وارد بر هر چهار ذره را برابر صفر کند؟ توضیح دهید.

شکل ۱۷-۲۴ مسئله‌های ۱۰، ۱۱ و ۷۰.

حل: (الف) برآیند نیروهای وارد بر ذره‌های ۱ و ۳ صفر است.

$$\vec{F}_{net} = 0 \Rightarrow (F_{net})x = 0$$

$$(F_{net})y = 0$$

$$(F_{net})_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_4}{2a^2}\cos(45°) + \frac{q_1q_2}{a^2}\right] = 0$$

$$\frac{Q^2}{2a^2\sqrt{2}} + \frac{qQ}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{q} = -2\sqrt{2}$$

(ب) خیر. می‌توان نشان داد اگر چنین باشد، آنگاه مقدار $\frac{Q}{q}$ برای هر رابطه متفاوت است که خلاف فرض سؤال و منطق است.

●●۱۱- ILW در شکل ۱۷-۲۴، بارها عبارت‌اند از $q_1 = -q_2 = 100nC$ و $q_3 = -q_4 = 200nC$، و فاصلهٔ بارها $a = 5/0cm$ است. مؤلفه‌های (الف) x و (ب) y نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۳ چقدر است؟

حل: (الف)

$$F_{3x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_3q_2}{2a^2}\cos(45) + \frac{q_3q_4}{a^2}\right)$$

$$= 9\times10^9\left[\frac{(200\times10^{-9})(100\times10^{-9})}{2(25\times10^{-4})}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{(200\times10^{-9})(200\times10^{-9})}{25\times10^{-4}}\right]$$

$$= 0/17 N$$

(ب)

$$F_{3y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_3q_2}{2a^2}\cos(45) - \frac{q_3q_1}{a^2}\right)$$

$$= 9\times10^9\left(\frac{(200\times10^{-9})(100\times10^{-9})}{2(25\times10^{-4})} - \frac{(200\times10^{-9})(100\times10^{-9})}{25\times10^{-4}}\right)$$

$$= -0/046 N$$

●●۱۲- دو ذره روی محور x ثابت شده‌اند. ذرهٔ ۱ با بار ۴۰μC در $x = -2/0$ cm، و ذرهٔ ۲ با بار Q در $x = 3/0$ cm واقع‌اند. ذرهٔ ۳ که بزرگی بار آن ۲۰μC است از حالت سکون روی محور y در $y = 2/0cm$ رها می‌شود. اگر شتاب اولیهٔ ذرهٔ ۳ در جهت مثبت (الف) محور x و (ب) محور y باشد، مقدار Q چقدر است؟

حل: (الف)

اگر بخواهیم شتاب در راستای محور x باشد، بنابراین نیروی برآیند در راستای محور y صفر است. از شکل پیداست:

$$F_{31}\sin\theta = F_{32}\sin(\varphi)$$

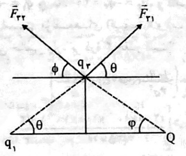
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{(2)^2+(3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{(2^2+2^2)\times 10^{-4}}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 Q}{(2^2+3^2)\times 10^{-4}}\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \frac{(40\times 10^{-6})\sqrt{2}}{16\times 10^{-4}} = \frac{2Q}{13\sqrt{13}\times 10^{-4}} \Rightarrow Q = -83\times 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

علامت منفی بدین جهت انتخاب شد که نیروی بین Q و q_3 باید مخالف هم باشد تا نیرو جاذبه باشد.

(ب) در این حالت نیروی افقی وارد بر ذره صفر است.



$$F_{31}\cos\theta = F_{32}\cos\varphi \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

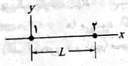
$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{[2^2+2^2]\times 10^{-4}}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 Q}{[3^2+2^2]\times 10^{-4}}\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow Q = 55/2\times 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

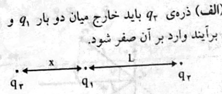
در این حالت چون نیروی بین q_3 و Q دافعه است، Q و q_3 هم علامت هستند.

●●۱۳- در شکل ۱۷-۲۵، ذرهٔ ۱ با بار $+1/0\,\mu C$ و ذرهٔ ۲ با بار $-3/0\,\mu C$ به فاصلهٔ $L = 10/0\ \mathrm{cm}$ روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذرهٔ ۳ با بار نامعلوم q_3 به گونه‌ای قرار داده شود که نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از طرف ذره‌های ۱ و ۲ صفر باشد، مختصهٔ (الف) x و (ب) y ذرهٔ ۳ باید چقدر باشد؟



شکل ۱۷-۲۵ مسئله‌های ۱۳، ۱۹، ۳۰، ۵۸ و ۶۷

حل: (الف) ذره‌ی q_3 باید خارج میان دو بار q_1 و q_2 باشد تا نیروی برآیند وارد بر آن صفر شود.



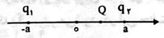
$$\frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 (x^2)} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 (L+x)^2} \Rightarrow \left(\frac{L+x}{x}\right)^2 = \left|\frac{q_2}{q_1}\right|$$

$$\left(\frac{10+x}{x}\right)^2 = \left|\frac{3}{1}\right| \Rightarrow x = 13/6\,\mathrm{cm}$$

(ب) تعادل روی محور x برقرار می‌شود و $y = 0$ است.

●●۱۴- سه ذره روی محور x ثابت شده‌اند. ذرهٔ ۱ با بار q_1 در $x = -a$ و ذرهٔ ۲ با بار q_2 در $x = +a$ قرار دارند. نسبت q_1/q_2 باید چقدر باشد تا در هنگامی که ذرهٔ ۳ با بار $+Q$ در (الف) $x = +0/500a$ و (ب) $x = +1/50a$ قرار دارد، نیروی الکتروستاتیکی وارد بر آن برابر با صفر باشد؟

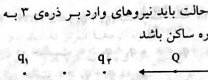
حل: (الف)



$$F_{31} = F_{32} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 Q}{(1/5a)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 Q}{(0/5a)^2}$$

$$\frac{q_1}{(1/5)^2} = \frac{q_2}{(0/5)^2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{1/5}{0/5}\right)^2 = 9$$

(ب) در این حالت باید نیروهای وارد بر ذره‌ی ۳ به صورت زیر باشد تا ذره ساکن باشد



$$F_{31} = F_{32} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{(2/5a)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{(0/5a)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{2/5}{0/5}\right)^2 = 25$$

کاملاً روشن است که q_1 و q_2 در این حالت دارای علامت‌های مختلف هستند.

●●۱۵- GO بارها و مختصات دو ذرهٔ باردار که در صفحهٔ xy ثابت شده‌اند عبارت‌اند از $q_1 = +3/0\,\mu C$ ، $x_1 = 3/5\ \mathrm{cm}$ ، $y_1 = 0/50\ \mathrm{cm}$ ، و $q_2 = -4/0\,\mu C$ ، $x_2 = -2/0\ \mathrm{cm}$ ، $y_2 = 1/5\,\mathrm{cm}$ ، (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذرهٔ ۱ را بیابید. در چه مختصهٔ (پ) x و (ت) y ذرهٔ سوم با بار $q_3 = +4/0\,\mu C$ باید قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف ذره‌های ۱ و ۲ صفر شود؟

حل: (الف)

$$r_{12} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(3/5+2)^2+(0/5-1/5)^2}$$
$$= 5/6\,\mathrm{cm}$$

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = 9\times 10^9\,\frac{(3\times 10^{-6})(4\times 10^{-6})^2}{(0/056)^2} = 34/5\,\mathrm{N}$$

نیرو جاذبه است.

(ب)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \Rightarrow \theta = -10/3^\circ$$

(پ) و (ت) فرض می‌کنیم ذره‌ی ۳ در مختصات x_3, y_3 قرار دارد. نیروی کولنی را به صورت برداری می‌نویسیم.

$$\vec{F}_{31} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{31}}{|r_{31}|^3}$$

$$\vec{r}_{31} = (x_1 - x_3)\hat{i} + (y_1 - y_3)\hat{j}$$
$$= (3/5\times 10^{-2} - x_3)\hat{i} + (0/5\times 10^{-2} - y_3)\hat{j}$$

$$\vec{F}_{32} = \frac{-q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{32}}{|r_{32}|^3}$$

$$\vec{r}_{32} = (x_2 - x_3)\hat{i} + (y_2 - y_3)\hat{j}$$
$$= (-2\times 10^{-2} - x_3)\hat{i} + (1/5\times 10^{-2} - y_3)\hat{j}$$

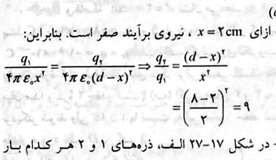
$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = 0 \Rightarrow \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{31}}{|r_{31}|^3} - \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{32}}{|r_{32}|^3} = 0$$

$$\Rightarrow q_1\frac{\vec{r}_{31}}{|r_{32}|^3} = +q_2\frac{\vec{r}_{32}}{|r_{32}|^3}$$

اگر این معادله‌ی برداری را حل کنیم، بدست می‌آوریم

$x_3 = -8/35\times 10^{-2}\ \mathrm{m}$ و $y_3 = 2/66\times 10^{-2}\ \mathrm{m}$

●●۱۶- GO در شکل ۱۷-۲۶ الف، ذرهٔ ۱ (با بار q_1) و ذرهٔ ۲ (با بار q_2) در مکانی روی محور x ثابت شده‌اند و از یکدیگر $8/00\mathrm{cm}$ فاصله دارند. می‌خواهیم ذرهٔ ۳ (با بار $q_3 = +8/00\times 10^{-19}\ \mathrm{C}$) به گونه‌ای روی خط میان ذره‌های ۱ و ۲ قرار گیرد که آنها نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{3,\mathrm{net}}$ را بر آن وارد کنند. شکل ۱۷-۲۶ ب، مؤلفهٔ x این نیرو را برحسب مختصهٔ x مکانی که ذرهٔ ۳ در آن واقع شده است، نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s = 8/0\mathrm{cm}$ مشخص شده است. (الف) علامت بار q_1 و (ب) نسبت q_2/q_1 چیست؟



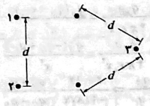
شکل ۱۷-۲۶ مسئلهٔ ۱۶

حل: (الف) هنگامی که بار q_3 به q_1 نزدیک می‌شود، نیروی بین آنها دافعه است، بنابراین این دو بار هم علامت هستند. $(q_1 > 0)$

(ب) به ازای $x = 2\mathrm{cm}$ ، نیروی برآیند صفر است. بنابراین:

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 (d-x)^2} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \frac{(d-x)^2}{x^2}$$
$$= \left(\frac{8-2}{2}\right)^2 = 9$$

●●۱۷- در شکل ۱۷-۲۷ الف، ذره‌های ۱ و ۲ هر کدام بار $20/0\,\mu C$ دارند و در فاصلهٔ $d = 1/50\mathrm{m}$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۱ ناشی از ذرهٔ ۲ چقدر است؟ در شکل ۱۷-۲۷ ب، ذرهٔ ۳ با بار $20/0\,\mu C$ به گونه‌ای قرار گرفته است که یک مثلث با ضلع‌های مساوی ایجاد می‌شود. (ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۱ ناشی از ذره‌های ۲ و ۳ چقدر است؟

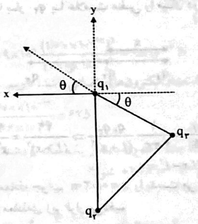


شکل ۱۷-۲۷ مسئلهٔ ۱۷

حل: (الف)

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2} = 9\times 10^9\,\frac{(20\times 10^{-6})^2}{(1/5)^2} = 1/6\,\mathrm{N}$$

(ب) از شکل پیداست $\theta = 30^\circ$ است.



$$F_{13x} = F_{13}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(20\times 10^{-6})^2\cos(30^\circ)}{(1/5)^2} = 1/4\,\mathrm{N}$$

$$F_{13y} = F_{13}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(20\times 10^{-6})^2}{(1/5)^2}\sin(30^\circ) = 0/8\,\mathrm{N}$$

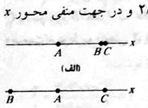
$$(F_{\mathrm{net}})_y = 1/6\,\mathrm{N} + 0/8\,\mathrm{N} = 2/4\,\mathrm{N}$$

$$(F_{\mathrm{net}})_x = 1/4\ \mathrm{N}$$

برآیند نیروها برابر است با:

$$F_{\mathrm{net}} = \sqrt{(2/4)^2 + (1/4)^2} = 2/78\,\mathrm{N}$$

●●۱۸- در شکل ۱۷-۲۸ الف، سه ذرهٔ باردار مثبت روی محور x ثابت شده‌اند. ذره‌های B و C به حدی به یکدیگر نزدیک‌اند که می‌توانیم فاصلهٔ آنها از ذرهٔ A را یکی بگیریم. نیروی خالص وارد بر ذرهٔ A از طرف ذره‌های B و C برابر با $2/014\times 10^{-23}\ \mathrm{N}$ و در جهت منفی محور x است. در شکل ۱۷-۲۹ ب، ذرهٔ B در طرف مخالف نسبت به A جابه‌جا شده است ولی هنوز در همان فاصله از A است. اکنون نیروی خالص وارد بر A برابر با $2/877\times 10^{-24}\ \mathrm{N}$ و در جهت منفی محور x است. نسبت q_C/q_B چقدر است؟



شکل ۱۷-۲۸ مسئلهٔ ۱۸

حل: از داده‌های سؤال پیداست که q_C با q_A هم علامت هستند و q_A و q_B علامت مخالف دارند.

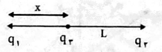
$$F_1=\frac{q_Aq_B}{4\pi\varepsilon_0 x^2}+\frac{q_Aq_C}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{q_A(q_B+q_C)}{x^2}$$

$$F_2=\frac{q_Aq_B}{4\pi\varepsilon_0 x^2}+\frac{q_Aq_C}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{q_A(-q_B+q_C)}{x^2}$$

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{q_B+q_C}{-q_B+q_C}\Rightarrow\frac{۲۰/۱۴}{-۲/۸۷۷}=\frac{q_B+q_C}{q_C-q_B}\Rightarrow\frac{q_C}{q_B}=۱/۳۳$$

●●۱۹- SSM WWW در شکل ۱۷-۲۵، ذرهٔ ۱ با بار $+q$ و ذرهٔ ۲ با بار $+۴/۰۰q$ در فاصلهٔ $L=۹/۰۰$ cm روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذرهٔ ۳ با بار q_3 به گونه‌ای قرار گیرد که سه ذره به هنگام رها شدن، در جای خود باقی بمانند (الف) مختصهٔ x و (ب) مختصهٔ y ذرهٔ ۳ و (پ) نسبت q_3/q باید چقدر باشد؟

حل: (الف) بار q_3 با علامت منفی را میان دو بار قرار می‌دهیم.



$$F_{13}=F_{23}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{(L-x)^2}\Rightarrow\frac{۴۹}{(L-x)^2}=\frac{۹}{x^2}$$

$$\Rightarrow 3x^2+2Lx-L^2=0$$

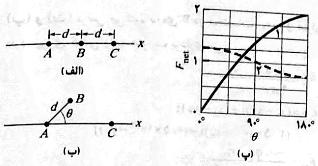
از حل این معادله جواب $x=۰/۰۳$m را بدست می‌آوریم. این مقدار را در معادله‌ی زیر قرار می‌دهیم

$$F_{31}=F_{21}\Rightarrow\frac{kq_3q}{۹\times10^{-4}}=\frac{kq(۴q)}{۸۱\times10^{-9}}\Rightarrow\frac{q_3}{q}=\frac{۴}{۹}$$

(ب) $y=0$

(پ) $\frac{q_3}{۹}=\frac{-۴}{۹}$

●●●۲۰- شکل ۱۷-۲۹ الف آرایشی از سه ذره باردار به فاصلهٔ d را نشان می‌دهد. ذره‌های A و C روی محور x ثابت شده‌اند، ولی ذرهٔ B می‌تواند روی دایره‌ای به مرکز ذرهٔ A حرکت کند. در حین این حرکت، خط شعاعی میان A و B با جهت مثبت محور x زاویهٔ θ می‌سازد (شکل ۱۷-۲۹ ب). منحنی‌ها در شکل ۱۷-۲۹ پ، برای دو وضعیت، بزرگی F_{net} نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ A از طرف ذره‌های دیگر را نشان می‌دهند. این نیروی خالص برحسب تابعی از زاویهٔ θ و برحسب مضربی از مقدار پایهٔ F_0 نشان داده شده است. مثلاً روی منحنی ۱، در $\theta=۱۸۰°$، در می‌یابیم که $F_{net}=2F_0$ است. (الف) برای وضعیت مربوط به منحنی ۱، نسبت بار ذرهٔ C به بار ذرهٔ B (همراه با علامت) چقدر است؟ (ب) برای وضعیت مربوط به منحنی ۲، این نسبت چقدر است؟



شکل ۱۷-۲۹ مسئلهٔ ۲۰

حل: (الف) دو حالت $\theta=0$ و $\theta=۱۸۰°$ را در نظر می‌گیریم در این دو حالت نیروهای وارد بر A کمینه و بیشینه است. در $\theta=0$ ، $F_A=0$ داریم:

$$\frac{kq_Bq_A}{d^2}=\frac{kq_Cq_A}{4d^2}\Rightarrow\left|\frac{q_C}{q_B}\right|=۴\quad,\quad\frac{q_C}{q_B}=-۴$$

(ب) با توجه به نمودار می‌توان مشاهده کرد

$$\theta=0\Rightarrow F_1=\frac{kq_Cq_A}{4d^2}+\frac{kq_Bq_A}{d^2}=۱/۲۵F_0$$

$$\theta=0\Rightarrow F_2=\frac{kq_Cq_A}{4d^2}-\frac{kq_Bq_A}{d^2}=۰/۷۵F_0$$

اگر دو رابطه را بازنویسی و بر هم تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{q_C+4q_B}{q_C-4q_B}=\frac{۱/۲۵}{۰/۷۵}\Rightarrow\frac{q_C}{q_B}=۱۶$$

●●●۲۱- یک پوستهٔ کروی نارسانا، با شعاع درونی ۴/۰cm و شعاع بیرونی ۶/۰cm دارای باری است که به طور یکنواخت در حجم بین سطح‌های درونی و بیرونی آن توزیع شده است. *چگالی بار حجمی* ρ یعنی، بار در واحد حجم دارای یکای کولن بر مترمکعب است. برای این پوسته $\rho=b/r$، که در آن r فاصله برحسب متر از مرکز پوسته و $b=۳/۰\mu C/m^2$ است. بار خالص موجود در پوسته چقدر است؟

حل:

$$q=\int dq=\int\rho\,dV=\int_{r_1}^{r_2}\frac{b}{r}4\pi r^2dr=2\pi b(r_2^2-r_1^2)$$

که به ازای مقادیر داده شده خواهیم داشت $q=۳/۸\times10^{-8}$ C.

●●●۲۲- GO شکل ۱۷-۳۰ آرایشی از چهار ذرهٔ باردار را، با زاویهٔ $\theta=۳۰/۰°$ و فاصلهٔ $d=۲/۰۰$cm نشان می‌دهد. بار ذرهٔ ۲ برابر با $q_2=+۸/۰۰\times10^{-19}$ C، و بار ذره‌های ۳ و ۴ برابر با $q_3=q_4=-۱/۶۰\times10^{-19}$ C است. (الف) اگر نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۱ از طرف ذره‌های دیگر برابر صفر باشد، فاصلهٔ D میان مبدأ و ذرهٔ ۲ چقدر است؟ (ب) اگر ذره‌های ۳ و ۴ به محور x نزدیکتر شوند ولی تقارن آنها نسبت به این محور حفظ شود، آیا مقدار مورد نظر D بزرگتر از قسمت (الف) است یا کوچکتر یا مساوی با آن است؟

شکل ۱۷-۳۰ مسئلهٔ ۲۲

حل: (الف) برای راستای x داریم:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3\cos\theta}{\left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_4}{\left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{(d+D)^2}$$

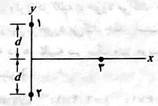
$$(\cos^3\theta)\left[\frac{q_3}{d_2}+\frac{q_4}{d^2}\right]=\frac{q_2}{(d+D)^2}\Rightarrow 2\frac{q_3}{d^2}\cos^3\theta=\frac{q_2}{(d+D)^2}$$

$$\frac{2(۱/۶\times10^{-19})}{۴\times10^{-4}}(\cos ۳۰)^3=\frac{۸\times10^{-19}}{(۰/۰۲+D)^2}$$

$$\Rightarrow D=۱/۹۲\times10^{-2}\text{ m}$$

(ب) زمانی که q_3 و q_4 به محور x نزدیک می‌شود، فاصله‌ی آنها تا بار q_1 کمتر شده، بنابراین نیروی بین آنها افزایش می‌یابد. بنابراین بار q_2 باید نزدیکتر باشد تا این افزایش نیرو را خنثی کند. بنابراین D کم می‌شود.

●●●۲۳- در شکل ۱۷-۳۱، ذره‌های ۱ و ۲ با بار $q_1=q_2=+۳/۲۰\times10^{-19}$ C روی محور y به فاصلهٔ $d=۱۷/۰$ cm از مبدأ واقع‌اند. ذرهٔ ۳ با بار $q_3=+۶/۴۰\times10^{-19}$ C به تدریج از $x=0$ تا $x=+۵/۰$ cm حرکت می‌کند. به ازای چه مقدارهایی از x بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ سوم از طرف دو ذرهٔ دیگر (الف) کمینه و (ب) بیشینه است؟ این بزرگی‌های (پ) کمینه و (ت) بیشینه چقدرند؟



شکل ۱۷-۳۱ مسئلهٔ ۲۳

حل: (الف) و (ب) نیروی برآیند وارد بر ذره‌ی q_3 در راستای محور x است.

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r^2}\cos\theta+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r^2}\cos\theta$$

$$F=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r^2}\cos\theta$$

$$r^2=x^2+d^2\ ,\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$\Rightarrow F=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3x}{(x^2+d^2)^{3/2}}$$

از این نیرو نسبت به x مشتق می‌گیریم و نقطه‌ی فرین آن را می‌یابیم.

$$\frac{dF}{dx}=0\Rightarrow(x^2+d^2)^{1/2}[(x^2+d^2)-3x^2]=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{\sqrt{2}}=۱۲\text{cm}$$

اگر مشتق دوم تابع را در $x=d/\sqrt{2}$ بدست آوریم، مقدار آن $-۱۶\sqrt{d^2}/۹\sqrt{3}d^5$ می‌شود. چون این مقدار کوچکتر است صفر است. بنابراین نقطه‌ی فرین یک بیشینه است.

به ازای $x=0$ نیروی برآیند صفر است که کمینه نیرو می‌باشد.

(پ) صفر

(ت) $$F=2(۹\times10^{-19})\frac{(۳/۲\times10^{19})(۶/۴\times10^{-19})}{[(۰/۱۲)^2+(۰/۱۷)^2]^{3/2}}(۰/۱۲)$$

$$=۴/۹\times10^{-26}\text{ N}$$

●۲۴- فاصلهٔ مرکز به مرکز دو قطره آب کروی کوچک با بار یکسان $-۱/۰۰\times10^{-16}$ C، برابر با ۱/۰۰cm است. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی که بین آنها عمل می‌کند چقدر است؟ (ب) چند الکترون اضافی در هر قطره موجب ناموازنی بار آنها شده است؟

حل: (الف)

$$F=k\frac{q^2}{r^2}=۹\times10^9\frac{(۱/۰۰\times10^{-16})^2}{(۱/۰۰\times10^{-2})^2}=۹\times10^{-19}\text{ N}$$

(ب) اگر N تعداد الکترون‌های اضافی باشد، داریم

$$N=\frac{q}{e}=\frac{۱/۰۰\times10^{-16}}{۱/۶\times10^{-19}}=۶۲۵$$

●۲۵- ILW چند الکترون باید از یک سکه برداشته شود تا بار باقیماندهٔ آن $+۱/۰\times10^{-7}$ C شود؟

حل:

$$q=Ne\Rightarrow N=\frac{q}{e}=\frac{۱/۰\times10^{-7}}{۱/۶\times10^{-19}}=۶/۲۵\times10^{11}$$

●۲۶- اگر فاصلهٔ یون‌های سدیم یک بار یونیده (Na^+، با بار $+e$) و کلر یک بار یونیده (Cl^-، با بار $-e$) در بلور نمک خوراکی $۲/۸۲\times10^{-10}$ m باشد، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان این دو یون چقدر است؟

حل: $$F=k\frac{e^2}{r^2}=(۹\times10^9)\frac{(۱/۶\times10^{-19})^2}{(۲/۸۲\times10^{-10})^2}=۲/۹\times10^{-9}\text{ N}$$

●۲۷- SSM بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو نوع یون مشابه که به فاصلهٔ $۵/۰\times10^{-10}$ m از هم قرار گرفته‌اند برابر با $۳/۷\times10^{-9}$ N است. (الف) بار هر یون چقدر است؟ (ب) هر یون چند الکترون "از دست داده" است؟ (بنابراین، بار این یون ناموازن است).

حل: (الف) اگر q بار روی هر یون و r فاصله آنها باشد داریم

$$F=k\frac{q^2}{r^2}\Rightarrow q=r\sqrt{\frac{F}{k}}=(۵\times10^{-10})\sqrt{\frac{۳/۷\times10^{-9}}{۹\times10^9}}$$

$$q=۳/۲\times10^{-19}\text{ C}$$

(ب) اگر N تعداد الکترون‌هایی باشد که هر یون فاقد آن است داریم $q=Ne$ و در نتیجه می‌توان نوشت

$$N=\frac{q}{e}=\frac{۳/۲\times10^{-19}}{۱/۶\times10^{-19}}=۲$$

●۲۸- [redacted] عبور جریان $0/300\ \text{A}$ از قفسهٔ سینه می‌تواند باعث لرزش عضلهٔ قلب، بر هم زدن ضرب آهنگ عادی ضربان قلب و اختلال در جریان خون (و در نتیجه اکسیژن) به مغز شود. اگر این جریان به مدت $2/00\ \text{min}$ تداوم یابد، چند الکترون رسانشی از قفسهٔ سینه عبور خواهد کرد؟

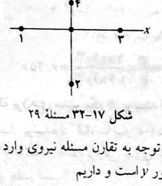
حل: مقدار بار پس از دو دقیقه برابر است با

$$q=(0/300)(120)=36/0\ \text{C}$$

در نتیجه داریم

$$q=Ne \Rightarrow 36=N(1/6\times10^{-19}) \Rightarrow N=2/25\times10^{20}$$

●●۲۹- در شکل ۱۷-۳۲، ذره‌های ۲ و ۴ با بار $-e$ در مکان خود واقع بر محور y، در $y_2=-10/0\text{cm}$ و $y_4=5/00\text{cm}$ ثابت شده‌اند. ذره‌های ۱ و ۳ با بار $-e$ می‌توانند در امتداد محور x حرکت کنند. ذرهٔ ۵ با بار $+e$ در مبدأ ثابت شده است. در ابتدا ذرهٔ ۱ در $x_1=-10/0\ \text{cm}$ و ذرهٔ ۳ در $x_3=10/0\ \text{cm}$ قرار دارند. (الف) ذرهٔ ۱ را باید تا چه مقدار x حرکت داد تا جهت نیروی الکتریکی خالص وارد بر ذرهٔ ۵ به اندازهٔ $30°$ پادساعتگرد بچرخد؟ (ب) وقتی ذرهٔ ۱ در مکان جدید خود ثابت شود، ذرهٔ ۳ را باید تا چه مقدار x حرکت داد تا $\vec{F}_{net}$ بچرخد و به جهت اولیهٔ خود باز گردد؟



شکل ۱۷-۳۲ مسئلهٔ ۲۹

حل: (الف) با توجه به تقارن مسئله نیروی وارد بر q_0 در آغاز در راستای محور y است و داریم

$$F_{net}=\frac{ke^2}{d^2}-\frac{ke^2}{4d^2}=\frac{3ke^2}{4d^2}$$

حال اگر بار q_1 را به اندازه x جابه‌جا کنیم، داریم:

$$F_x=-\frac{ke^2}{(2d-x)^2}+\frac{ke^2}{(2d)^2}=\frac{ke^2[-4d^2+(2d-x)^2]}{4d^2(2d-x)^2}$$

$$F_y=\frac{3ke^2}{4d^2}$$

$$\tan(120°)=\frac{F_y}{F_x}\Rightarrow -1/73=\frac{3(2d-x)^2}{[-4d^2+(2d-x)^2]}$$

با ساده کردن رابطهٔ فوق و قرار دادن $d=5\text{cm}$ و حل معادله برای x خواهیم داشت $x=3/95\text{cm}$

(ب) برای اینکه دوباره شرایط تقارن حاصل شود باید بار ۳ را نیز به همین اندازه بار ۵ نزدیک کنیم تا دوباره مؤلفه‌های x نیروها یکدیگر را خنثی کنند و برآیند در راستای y قرار گیرد.

●●۳۰- در شکل ۱۷-۲۵، ذره‌های ۱ و ۲ در مکان خود روی محور x به فاصلهٔ $L=8/00\ \text{cm}$ ثابت شده‌اند. بارهای آنها $q_1=+e$ و $q_2=-27e$ است. ذرهٔ ۳ با بار $q_3=+4e$ روی خط میان ذره‌های ۱ و ۲ قرار داده می‌شود تا آنها نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{3,net}$ را بر آن وارد کنند. (الف) ذرهٔ ۳ باید در چه مختصه‌ای قرار گیرد. تا بزرگی این نیرو کمینه شود؟ (ب) بزرگی کمینه چقدر است؟

حل:

$$F_{3,net}=\frac{kq_1q_3}{x^2}+\frac{kq_2q_3}{(L-x)^2}=\frac{4ke^2}{x^2}+\frac{108ke^2}{(L-x)^2}$$

$$=4ke^2\left[\frac{1}{x^2}+\frac{27}{(L-x)^2}\right]$$

$$\frac{dF_{3,net}}{dx}=0\Rightarrow 4ke^2\left[\frac{-2}{x^3}-\frac{(27)(2)}{(L-x)^3}\right]=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{L}{4}\quad\Rightarrow\quad x=2\text{cm}$$

(ب) این مقدار x را در رابطه $F_{3,net}$ قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$F_{3,net}=9/21\times10^{-24}\ \text{N}$$

●●۳۱- ILW جو زمین به طور دائم با *پروتون‌های پرتو کیهانی* که برآمده‌از جایی در فضا هستند بمباران می‌شود. اگر همهٔ پروتون‌ها از جو بگذرند، به هر متر مربع از سطح زمین به طور متوسط ۱۵۰۰ پروتون در ثانیه برخورد می‌کند. جریان الکتریکی که با کل سطح زمین برخورد می‌کند چقدر است؟

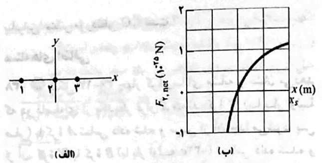
حل: جریانی که در هر ثانیه بر یک متر مربع از زمین وارد می‌شود برابر است با

$$\frac{i}{A}=(1500)(1/6\times10^{-19})=2/4\times10^{-16}\ \text{C/s}\cdot\text{m}^2$$

بنابراین جریانی که از سطح زمین $(4\pi R_E^2)$ می‌گذرد برابر است با

$$i=(2/4\times10^{-16}\ C/s\cdot m^2)4\pi(6/37\times10^6\ \text{m})^2=0/123\ \text{A}$$

●●۳۲- شکل ۱۷-۳۳ الف ذره‌های باردار ۱ و ۲ را که در مکانی روی محور x ثابت شده‌اند نشان می‌دهد. ذرهٔ ۱ دارای باری‌به‌بزرگی $|q_1|=8/00\ e$ است. ذرهٔ ۳ با بار $q_3=+8/00\ e$ در ابتدا روی محور x در نزدیکی ذرهٔ ۲ واقع است. حال ذرهٔ ۳ را به تدریج در سوی مثبت محور x حرکت می‌دهیم. در نتیجه، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{2,net}$ وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذره های ۱ و ۳ تغییر می‌کند. شکل ۱۷-۳۳ ب مؤلفهٔ x نیروی خالص را برحسب تابعی از مکان x ذرهٔ ۳ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s=0/80\text{m}$ مشخص شده است. نمودار وقتی $x\to\infty$ دارای یک مجانب $F_{2,net}=1/5\times10^{-25}\ \text{N}$ است. بزرگی بار ذرهٔ ۲ برحسب مضربی از e، و علامت آن چیست؟



شکل ۱۷-۳۳ مسئلهٔ ۳۲

حل: با توجه به نمودار دیده می‌شود که منحنی در $r=0/4\text{m}$، صفر را قطع می‌کند.

$$F=\frac{kq_1q_2}{r^2}\Rightarrow q_2=\frac{F}{kq_1}r^2$$

$$q_2=\frac{(1/5\times10^{-25})(0/4)^2}{(8/99\times10^9)(8/00\times1/6\times10^{-19})}=2/08\times10^{-18}\ \text{C}$$

$$=13e$$

●●۳۳- تعداد کولن‌های بار مثبت در $250\ \text{cm}^3$ آب (خنثی) را محاسبه کنید. (*راهنمایی:* اتم هیدروژن دارای یک پروتون، و اتم اکسیژن دارای ۸ پروتون است).

حل: جرم آب برابر است با $m=\rho V=(1)(250)=250\text{g}$ و تعداد مولکول‌های آن برابر است با

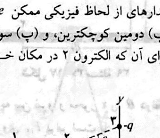
$$N=N_0\frac{m}{M}=(6/02\times10^{23})\left(\frac{250}{18}\right)=8/36\times10^{24}$$

هر مولکول آب دارای ۱۰ پروتون است که بار هر کدام برابر e است لذا بار کل برابر است با

$$Q=N(10e)=(8/36\times10^{24})(10)(1/6\times10^{-19})$$

$$=1/34\times10^7\ \text{C}$$

●●●۳۴- شکل ۱۷-۳۴، الکترون‌های ۱ و ۲ را روی محور x و یون‌های باردار ۳ و ۴ را با بار یکسان $-q$ و در زاویه‌های یکسان θ نشان می‌دهد. الکترون ۲ می‌تواند آزادانه حرکت کند؛ سه ذرهٔ دیگر در مکان خود به فاصله‌های افقی R از الکترون ۲ ثابت شده‌اند و می‌خواهند الکترون ۲ را در مکان خود ثابت نگه دارند. برای مقدارهای از لحاظ فیزیکی ممکن $q\le5e$، (الف) کوچکترین، (ب) دومین کوچکترین، و (پ) سومین کوچکترین مقدارهای θ برای آن که الکترون ۲ در مکان خود ثابت بماند چقدر است؟



شکل ۱۷-۳۴ مسئلهٔ ۳۴

حل: برای اینکه الکترون ۲ ثابت باقی بماند، باید برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد

$$\cos\theta=\frac{R}{r}\Rightarrow r=\frac{R}{\cos\theta}$$

$$F_{23}=F_{24}\Rightarrow\frac{kq_2q_3}{r^2}=\frac{kq_2q_3\cos^2\theta}{R^2}$$

$$F_{12}=2F_{23}\cos\theta\Rightarrow\frac{ke^2}{R^2}=2\frac{kqe\cos^2\theta}{R^2}\cos\theta$$

$$q=\frac{e}{2\cos^3\theta}$$

اما با در نظر گرفتن شرط $q\le5e$ داریم

$$\frac{e}{2\cos^3\theta}\le5e\Rightarrow\cos\theta\ge\frac{1}{(10)^{1/3}}$$

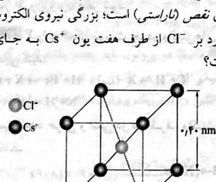
در نتیجه باید $\theta\le62/34°$ باشد. چون مسئله مقادیر ممکن فیزیکی را خواسته و اینکه $q=Ne$ و $N=1,\ldots,5$ است. از رابطه‌ایی که برای q به دست آوردیم، خواهیم داشت $\cos\theta=(1/2N)^{1/3}$.

(الف) برای کمترین مقدار زاویه به ازای $N=1$ برابر با $37/5°$ می‌شود.

(ب) برای دومین کمترین مقدار زاویه به ازای $N=2$ برابر $50/95°$ می‌شود.

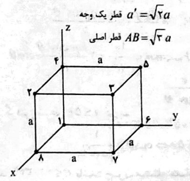
(پ) سومین کمترین مقدار زاویه به ازای $N=3$ برابر $56/6°$ می‌شود.

●●●۳۵- SSM در بلورهای نمک سزیم کلراید، یون‌های سزیم Cs^+، هشت گوشهٔ یک مکعب را می‌سازند و یون کلر Cl^- در مرکز آن مکعب قرار دارد (شکل ۱۷-۳۶). طول ضلع مکعب $0/40\text{nm}$ است. یون‌های Cs^+ هر یک کمبود یک الکترون دارند (و بنابراین، بار هر کدام $+e$ است)، و یون Cl^- یک الکترون اضافی دارد (و بنابراین، بار آن $-e$ است). (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر یون Cl^- ناشی از ۸ یون Cs^+ که در گوشه‌های مکعب قرار دارند، چقدر است؟ (ب) اگر یکی از یون‌های Cs^+ در جای خود نباشد، گفته می‌شود که بلور دارای *نقص (ناراستی)* است؛ بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر Cl^- از طرف هفت یون Cs^+ به جای مانده چقدر است؟



شکل ۱۷-۳۵ مسئلهٔ ۳۵

حل: **(الف)** هشت نیروی وارد بر یون Cl^{-1} دوبه‌دو یکدیگر را خنثی می‌کنند، در نتیجه نیروی کل وارد بر یون Cl^{-1} صفر می‌باشد.



(ب) چهار نیروی وارد بر یون Cl^{-1} از طرف بارهای ۸، ۵، ۳ و ۴ دوبه‌دو یکدیگر را خنثی می‌کنند. نیروی وارد از طرف بارهای ۲ و ۶ نیز یکدیگر را خنثی می‌کنند و تنها نیروی وارد از طرف بار ۷ باقی می‌ماند.

$$F=F_7=\frac{ke^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{(9\times10^{9})(1/6\times10^{-19})^2}{\left(\frac{3}{4}\right)(0/4\times10^{-9})^2}$$
$$=1/92\times10^{-9}\ \text{N}$$

بخش ۱۷-۶ بار الکتریکی پایسته است

●۳۶- الکترون‌ها و پوزیترون‌ها توسط تبدیل‌های هسته‌ای پروتون‌ها و نوترون‌ها که به نام *واپاشی بتا* شناخته شده‌اند، ایجاد می‌شوند. (الف) اگر یک پروتون به یک نوترون تبدیل شود، آیا یک الکترون یا یک پوزیترون ایجاد می‌شود؟ (ب) اگر یک نوترون به یک پروتون تبدیل شود، آیا یک الکترون یا یک پوزیترون ایجاد می‌شود؟

حل: **(الف)** بار اولیه مثبت است و با توجه با پایستگی بار باید یک پرزیترون که دارای بار مثبت است گسیل شود.

(ب) بار اولیه صفر است لذا باید یک الکترون گسیل شود تا مجموع بار آن و پروتون صفر شود.

●۳۷- SSM X را به کمک پیوست ج، در واکنش‌های هسته‌ای زیر شناسایی کنید:

(الف) $^{1}H+^{9}Be\to X+n$ ؛ (ب) $^{12}C+^{1}H\to X$ ؛ (پ) $^{15}N+^{1}H\to ^{4}He+X$

حل: مجموع عدد جرمی و اتمی در دو طرف واکنش‌ها باید مساوی باشند.

(الف)

$$^{1}_{1}H+^{9}_{4}B\to ^{9}_{5}X+^{1}_{0}n$$

بنابراین عنصر موردنظر ^{9}Be است.

(ب)

$$^{12}_{6}C+^{1}_{1}H\to ^{13}_{7}X$$

بنابراین عنصر موردنظر $^{13}_{7}N$ است.

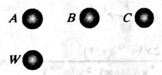
(پ)

$$^{15}_{7}N+^{1}_{1}H\to ^{4}_{2}He+^{12}_{6}X$$

بنابراین عنصر موردنظر $^{12}_{6}C$ است.

مسئله‌های اضافی

۳۸- GO شکل ۱۷-۳۶ چهار کرهٔ رسانای مشابه را نشان می‌دهد که در فاصله‌ای از یکدیگر قرار گرفته‌اند. کرهٔ W (با بار اولیهٔ صفر) با کرهٔ A تماس داده شده و سپس از آن جدا می‌شود. پس از آن، کرهٔ W با کرهٔ B (با بار اولیه $-32e$) تماس داده شده و سپس از آن جدا می‌شود. سرانجام، کرهٔ W با کرهٔ C (با بار اولیهٔ $+48\,e$) تماس داده شده و از آن جدا می‌شود. بار نهایی روی کرهٔ W برابر $+18\,e$ است. بار اولیهٔ روی کرهٔ A چقدر بوده است؟



شکل ۱۷-۳۶ مسئلهٔ ۳۸

حل: در تماس اول بار کره‌ی A نصف شده و بار کره‌ی W برابر $\frac{1}{2}q_A$ می‌شود که q_A بار اولیه‌ی کره‌ی A است. در تماس با کره‌ی B داریم:

$$q'_W=\frac{1}{2}(q_W+q_B)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_A-32e\right)$$

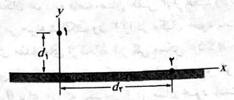
در تماس با کره‌ی C داریم:

$$q''_W=\frac{1}{2}(q'_W+q_C)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{19}{2}A-32e\right)\right]=18e$$

از حل بدست می‌آوریم:

$$q_A=16e$$

۳۹- SSM در شکل ۱۷-۳۷، ذرهٔ ۱ با بار $+4e$ در فاصلهٔ $d_1=2/00\ \text{mm}$ بالای کف، و ذرهٔ ۲ با بار $+6e$ روی آن کف به فاصلهٔ افقی $d_2=6/00\ \text{mm}$ از ذرهٔ ۱ قرار دارد. مؤلفهٔ x نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذرهٔ ۱ چقدر است؟



شکل ۱۷-۳۷ مسئلهٔ ۳۹

حل: چنانچه زاویه بین نیرو و محور x را θ درنظر بگیریم، در نتیجه مؤلفهٔ x نیروی F_{12} برابر است با:

$$F_x=F_{12}\cos\theta=\frac{kq_1q_2}{d_1^2+d_2^2}\times\frac{L2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}}$$
$$=1/31\times10^{-22}\ \text{N}$$

۴۰- در شکل ۱۷-۲۲، ذره‌های ۱ و ۲ در مکان خود ثابت شده‌اند، ولی ذرهٔ ۳ می‌تواند آزادانه حرکت کند. اگر نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر و $L_{23}=2/00\,L_{12}$ باشد، نسبت q_1/q_2 چقدر است؟

حل: برای اینکه نیروی خالص بر q_3 صفر باشد داریم:

$$\frac{kq_1q_3}{(L_{12}+L_{23})^2}=\frac{kq_2q_3}{(L_{23})^2}\Rightarrow\frac{q_1}{9L_{12}^2}=\frac{q_2}{4L_{12}}$$
$$\Rightarrow\frac{q_1}{q_2}=\frac{9}{4}$$

چون نیروها اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند بارهای q_1 و q_2 ناهمنام‌اند.

۴۱- (الف) چه بارهای مثبت یکسانی باید روی زمین و ماه قرار داده شوند تا جاذبهٔ گرانشی آنها را خنثی کند؟ (ب) چرا برای حل این مسئله نیازی به دانستن فاصلهٔ آنها ندارید؟ (پ) چند کیلوگرم یون هیدروژن (یعنی، پروتون) برای تهیهٔ بار مثبت محاسبه شده در قسمت (الف) مورد نیاز است؟

حل: **(الف)**

$$G\frac{m_em_m}{r^2}=k\frac{q^2}{r^2}$$
$$(6/67\times10^{-11})(5/98\times10^{24})(7/36\times10^{22})=(9\times10^{9})q^2$$
$$q=5/71\times10^{13}\ \text{C}$$

(ب) چون فاصله از رابطه حذف می‌شود.

(پ)
$$n=\frac{q}{e}=\frac{5/71\times10^{13}}{1/6\times10^{-19}}=3/57\times10^{32}$$

تعداد پروتون‌ها، n برابر تعداد اتم‌های هیدروژن است. هر پروتون نیز دارای جرم $1/67\times10^{-27}\ \text{kg}$ است، لذا داریم:

$$m=(3/57\times10^{32})(1/6\times10^{-27})=5/96\times10^{5}\ \text{kg}$$

۴۲- در شکل ۱۷-۳۸، دو گوی رسانای کوچک با جرم یکسان m و بار یکسان q از نخ‌هایی نارسانا به طول L آویزان‌اند. فرض کنید θ به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان $\tan\theta$ را با مقدار تقریباً برابر آن، $\sin\theta$، جایگزین کرد. (الف) نشان دهید که

$$x=\left(\frac{q^2L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$

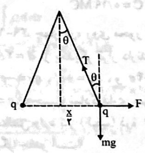
فاصلهٔ x گوی‌ها به هنگام تعادل را به دست می‌دهد. (ب) اگر $L=120\ \text{cm}$، $m=10\ \text{g}$، و $x=5/0\ \text{cm}$ باشد، $|q|$ چقدر است؟

شکل ۱۷-۳۸ مسئله‌های ۴۲ و ۴۳

حل: **(الف)** از شرط تعادل داریم

$$F=T\sin\theta$$
$$mg=T\cos\theta$$

از تقسیم دو رابطه $\tan\theta=\frac{F}{mg}\Rightarrow F=mg\tan\theta$



با توجه به کوچک بودن θ می‌توان نوشت

$$\tan\theta=\sin\theta=\frac{\frac{x}{2}}{L}=\frac{x}{2L}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{kq^2}{x^2}=mg\left(\frac{x}{2L}\right)\Rightarrow x=\left(\frac{2kq^2L}{mg}\right)^{1/3}$$

(ب)
$$(9\times10^{9})q^2=(10\times10^{-3})(9/8)\frac{(5\times10^{-2})^3}{(2)(0/12)}$$
$$\Rightarrow q=2/4\times10^{-8}\ \text{C}$$

۴۳- (الف) اگر یکی از گوی‌های مسئلهٔ ۴۲ تخلیه شود (مثلاً بار q خود را به زمین بدهد) توضیح دهید که برای گوی‌ها چه رخ می‌دهد. (ب) فاصلهٔ تعادل جدید x را با استفاده از مقدارهای داده شدهٔ L و m و مقدار محاسبه شدهٔ $|q|$ به دست آورید.

حل: **(الف)** وقتی یکی از گوی‌ها تخلیه شوند، دوگوی به هم نزدیک شده و تماس می‌یابند و در این حالت بار بین آنها تقسیم می‌شود. بار جدید گوی‌ها برابر است با:

$$q'=\frac{q}{2}=1/2\times10^{-8}\ \text{C}$$

(ب) فاصله جدید بین دو گوی x' با قرار دادن q' در رابطه x به دست می‌آید، $x'=0/031\text{m}$

۴۴- SSM فاصلهٔ دو پروتون باید چقدر باشد تا بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر هر یک از دو پروتون برابر با بزرگی نیروی گرانشی وارد بر یک پروتون در سطح زمین باشد؟

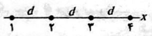
حل:
$$\text{mg}=k\frac{e^2}{r^2}$$
$$(1/67\times10^{-27})(9/8)=(9\times10^{9})\frac{(1/6\times10^{-19})^2}{\text{r}^2}$$
$$\Rightarrow\text{r}=0/119\ \text{m}$$

۴۵- چند مگاکولن بار مثبت در ۱/۰۰ مول گاز هیدروژن‌ـ مولکولی (H_2) وجود دارد؟

حل: در هر مولکول گاز H_2 دو پروتون وجود دارد، هر یک با بار $+e$ یک مول گاز داریم لذا تعداد اتم‌ها برابر با عدد آواگادرو است.

$$q = N_A Ze = (6/02\times10^{23})(2)(1/6\times10^{-19}) = 1/92\times10^{5}\ \mathrm{C} = 0/19\ \mathrm{MC}$$

۴۶- در شکل ۱۷-۳۹، چهار ذره روی محور x ثابت شده‌اند و به فاصلهٔ $d = 2/00\ \mathrm{cm}$ از یکدیگر قرار دارند. بارها عبارت‌اند از: $q_1 = +2e$ ، $q_2 = -e$ ، $q_3 = +e$ ، و $q_4 = +4e$، با $e = 1/60\times10^{-19}\ \mathrm{C}$. برحسب نمادگذاری بردار یکه، نیروی الکتروستاتیک خالص وارد بر (الف) ذرهٔ ۱ و (ب) ذرهٔ ۲، از طرف ذره‌های دیگر چقدر است؟



شکل ۱۷-۳۹ مسئلهٔ ۴۶

حل: (الف) با توجه به جهت مثبت محور x داریم.

$$F_1 = F_{12} - F_{13} - F_{14}$$

$$F_1 = \frac{2ke^2}{d^2} - \frac{2ke^2}{4d^2} - \frac{8ke^2}{9d^2} = \frac{11ke^2}{18d^2}$$

$$= \frac{(11)(9\times10^9)(1/6\times10^{-19})}{(0/02)^2} = 3/52\times10^{-25}\ \mathrm{N}$$

(ب) در این حالت داریم

$$F_2 = F_{23} + F_{24} - F_{21}$$

$$F_2 = \frac{4ke^2}{4d^2} + \frac{ke^2}{d^2} - \frac{2ke^2}{d^2} = 0$$

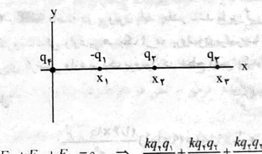
۴۷- بارهای نقطه‌ای $+6/0\ \mu\mathrm{C}$ و $-4/0\ \mu\mathrm{C}$ روی محور x، به ترتیب در $x = 8/0\ \mathrm{m}$ و $x = 16\ \mathrm{m}$ ثابت شده‌اند. چه باری باید در $x = 24\mathrm{m}$ قرار داده شود تا به هر باری که در مبدأ قرار گیرد هیچ نیروی الکتروستاتیکی وارد نشود؟

حل:

$x_1 = 8\mathrm{cm}$

$x_2 = 16\mathrm{cm}$

$x_3 = 24\mathrm{cm}$

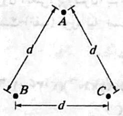


$$F_{41} + F_{42} + F_{43} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{kq_4q_1}{x_1^2} + \frac{kq_4q_2}{x_2^2} + \frac{kq_4q_3}{x_3^2} = 0$$

$$\frac{6\times10^{-6}}{(8)^2\times10^{-4}} + \frac{-4\times10^{-6}}{(16)^2\times10^{-4}} + \frac{q_3}{(24)^2\times10^{-4}} = 0 \Rightarrow$$

$$q_3 = -45\times10^{-6}\ \mathrm{C}$$

۴۸- در شکل ۱۷-۴۰، سه کرهٔ رسانای مشابه یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $d = 20/0\ \mathrm{cm}$ را تشکیل داده‌اند. شعاع‌های کره‌ها بسیار کوچکتر از d است و بار کره‌ها عبارت‌اند از: $q_A = -2/00\ \mathrm{nC}$ ، $q_B = -4/00\ \mathrm{nC}$، و $q_C = +8/00\ \mathrm{nC}$. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌های A و C چقدر است؟ مرحله‌های زیر را در نظر بگیرید: A و B توسط سیم نازکی به هم متصل شده و سپس اتصال برداشته می‌شود؛ B توسط سیمی به زمین متصل شده و سپس اتصال برداشته می‌شود؛ B و C توسط سیمی به یکدیگر متصل می‌شوند و سپس اتصال قطع می‌شود. اکنون بزرگی‌های نیروی الکتروستاتیکی (ب) میان کره‌های A و C ، و (پ) میان کره‌های B و C چقدر است؟



شکل ۱۷-۴۰ مسئلهٔ ۴۸

حل: (الف)
$$F_{AC} = k\frac{q_Aq_C}{d^2} = (9\times10^9)\frac{(2\times10^{-9})(8\times10^{-9})}{(0/2)^2} = 3/6\times10^{-6}\ \mathrm{N}$$

(ب) پس از اتصال A و B بار آنها یکسان می‌شود.

$$q_A = q_B = \frac{-2-4}{2} = -3\ \mathrm{nC}$$

پس از اتصال B به زمین $q_B = 0$ می‌شود. حال B و C به یکدیگر متصل می‌شود، بار هر کدام برابر است با:

$$q_B = q_C = \frac{0+8}{2} = 4\ \mathrm{nC}$$

در نتیجه بار نهایی کره‌ها برابر خواهد بود با

$q'_A = -3\ \mathrm{nC} \qquad q'_B = q'_C = 4\ \mathrm{nC}$

$$F_{AC} = k\frac{q'_Aq'_C}{d^2} = (9\times10^9)\frac{(-3\times10^{-9})(4\times10^{-9})}{(0/2)^2} = -2/7\times10^{-6}\ \mathrm{N}$$

جاذبه

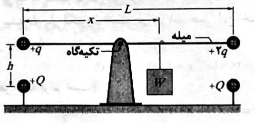
(پ)
$$F_{BC} = k\frac{q'_Bq'_C}{d^2} = (9\times10^9)\frac{(4\times10^{-9})^2}{(0/2)^2} = 3/6\times10^{-6}\ \mathrm{N}$$

دافعه

۴۹- هر نوترون شامل یک کوارک «بالا» با بار $+2e/3$ و دو کوارک «پایین» هر یک با بار $-e/3$ است. اگر فرض کنیم فاصلهٔ کوارک‌های پایین در داخل نوترون برابر با $2/6\times10^{-15}\ \mathrm{m}$ باشد، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان آنها چقدر است؟

حل:
$$F = \frac{k\left(\frac{e}{3}\right)^2}{r^2} = \frac{(9\times10^9)\left(\frac{1}{9}\right)(1/6\times10^{-19})^2}{(2/6\times10^{-15})^2} = 3/79\ \mathrm{N}$$

۵۰- شکل ۱۷-۴۱ میله‌ای نارسانا، بدون جرم و بلند به طول L را نشان می‌دهد که در مرکزش لولا شده و با قطعه‌ای به وزن W که در فاصلهٔ x از انتهای چپ قرار دارد موازنه کرده است. به دو انتهای چپ و راست میله، کره‌های رسانای کوچکی به ترتیب با بارهای مثبت q و $2q$ متصل است. به فاصلهٔ h مستقیماً زیر هر یک از این کره‌ها، کره‌ای با بار مثبت Q قرار دارد. (الف) هنگامی که میله افقی و موازنه کرده است، فاصلهٔ x چقدر است؟ (ب) h چه مقداری باید داشته باشد تا وقتی میله افقی و در توازن است هیچ نیروی قائمی بر تکیه‌گاه وارد نکند؟



شکل ۱۷-۴۱ مسئلهٔ ۵۰

حل: (الف) شرط تعادل دورانی حول تکیه را می‌نویسیم

$$\Sigma\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_1\frac{L}{2} - W\left(x - \frac{L}{2}\right) + F_2\frac{L}{2} = 0$$

$$-\frac{kQq}{h^2}\left(\frac{L}{2}\right) - W\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{2kQq}{h^2}\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{kQq}{Wh^2}\right)$$

(ب) شرط تعادل انتقال را در راستای قائم می‌نویسیم:

$$\Sigma F = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{kQq}{h^2} + \frac{2kQq}{h^2} - W + F_N = 0$$

از شرط مسئله $F_N = 0$ لذا داریم.

$$h = \sqrt{\frac{3kQq}{W}}$$

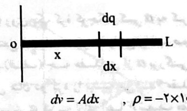
۵۱- میلهٔ نارسانای بارداری به طول $2/00\ \mathrm{m}$ و سطح مقطع $4/00\ \mathrm{cm}^2$ در طرف مثبت محور x به گونه‌ای قرار دارد که یک سر آن در مبدأ است. *چگالی بار حجمی* ρ، بار در واحد حجم برحسب کولن بر متر مکعب است. اگر ρ (الف) یکنواخت باشد، با مقدار $-4/00\ \mu\mathrm{C/m^3}$ و (ب) نایکنواخت باشد، با مقداری که با رابطهٔ $\rho = bx^2$ داده می‌شود که در آن $b = -2/00\ \mu\mathrm{C/m^5}$ است، چه مقدار الکترون اضافی روی میله قرار دارد؟

حل: (الف) ρ ثابت است لذا خواهیم داشت:

L طول و A سطح مقطع میله است

$$q = \int\rho\, dv = \rho v = \rho LA = -(4\times10^{-6})(2)(4\times10^{-4}) = -32\times10^{-10}\ \mathrm{C}$$

$$N = \frac{q}{e} = \frac{-32\times10^{-10}}{-1/6\times10^{-19}} = 2\times10^{10}$$



(ب) $\rho = -2\times10^{-6}\,x^2 \quad , \quad dv = A\,dx$

$$q = \int\rho\, dv = \int\rho A\, dx = \int_0^2(-2\times10^{-6}x^2)(4\times10^{-4})\,dx$$

$$= (-8\times10^{-10})\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = -21/33\times10^{-10}\ \mathrm{C}$$

$$N = \frac{q}{c} = \frac{-21/33\times10^{-10}}{-1/6\times10^{-19}} = 1/33\times10^{10}$$

۵۲- ذره‌ای با بار Q در مبداء دستگاه مختصات ثابت شده است. در $t = 0$ ، ذره‌ای ($m = 0/800\mathrm{g}$ و $q = 4/00\ \mu\mathrm{C}$) که در $x = 20/0\ \mathrm{cm}$ روی محور x واقع است، با تندی $50/0\ \mathrm{m/s}$ در جهت مثبت y حرکت می‌کند. به ازای چه مقداری از Q ذرهٔ متحرک، حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد؟ (از نیروی گرانشی وارد بر ذره چشم‌پوشی کنید.)

حل: برای اینکه حرکت دورانی برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{kQq}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow Q = \frac{mv^2R}{kq}$$

$$Q = \frac{(0/8\times10^{-3})(50)^2(0/2)}{(9\times10^9)(4\times10^{-6})} = 1/11\times10^{-5}\ \mathrm{C}$$

۵۳- بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو بار نقطه‌ای $1/00\ \mathrm{C}$ به فاصلهٔ (الف) $1/00\ \mathrm{m}$ و (ب) $1/00\ \mathrm{km}$ چقدر می‌شد اگر چنین بارهای نقطه‌ای وجود داشتند (که ندارند) و اگر چنین پیکربندی وجود می‌داشت؟

حل: (الف)
$$F = (9\times10^9)\frac{(1)^2}{(1)^2} = 9\times10^9\ \mathrm{N}$$

(ب)
$$F = (9\times10^9)\frac{(1)^2}{(10^3)^2} 9000\ \mathrm{N}$$

۵۴- بار $6/0\ \mu\mathrm{C}$ به دو بخش تقسیم شده و سپس به فاصلهٔ $3/0\ \mathrm{mm}$ از یکدیگر قرار داده شده‌اند. بیشینهٔ مقدار ممکن نیروی الکتروستاتیکی میان این دو بخش چقدر است؟

حل: بار Q را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، q و $Q-q$. در نتیجه نیروی بین این دو برابر است با:

$$F = \frac{k(Q-q)q}{r^2} = \frac{k}{r^2}(Qq - q^2)$$

با تغییر q نیرو تغییر می‌کند، شرط بیشینه را برای F می‌نویسیم:

$$\frac{dF}{dq} = 0 \qquad \frac{k}{r^2}(Q - 2q) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{Q}{2}$$

$$F_{max}\Big|_{q=\frac{Q}{2}} = \frac{k\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{2}\right)}{r^2} = \frac{(9\times10^9)(3\times10^{-6})^2}{(9\times10^{-6})^2} = 9000\ \mathrm{N}$$

۵۵- از بار Q روی یک کرهٔ کوچک، کسر α به کرهٔ دومی در نزدیکی آن منتقل شده است. کره‌ها را می‌توان به صورت ذره در نظر گرفت.(الف) چه مقداری از α بزرگی F نیروی الکتروستاتیکی میان دو کره را بیشینه می‌کند؟ مقدارهای (ب) کمتر و (پ) بیشتر α که به ازای آنها F نصف مقدار بیشینه می‌شود، چقدر است؟

حل: (الف) بار روی یک کره αQ و بار روی کره دیگر را $(۱-\alpha)Q$ در نظر می‌گیریم، داریم

$$F = k\frac{\alpha(۱-\alpha)Q^۲}{d^۲}$$

مشتق F را نسبت به α برابر صفر قرار می‌دهیم مقدار $\alpha=\frac{۱}{۲}$ برای F_{max} به دست می‌آید، یعنی وقتی که بار Q به دو قسمت مساوی تقسیم شود نیروی بین دوبار بیشینه است.

(ب) و (پ) $F=\frac{۱}{۲}F_{max}$ $\quad F_{max}=\frac{kQ^۲}{۴d^۲}$

$$\frac{k\alpha(۱-\alpha)Q^۲}{d^۲}=\left(\frac{۱}{۲}\right)\frac{kQ^۲}{۴d^۲}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_۱=۰/۸۵\\ \alpha_۲=۰/۱۴\end{cases}$$

۵۶- [redacted] اگر گربه‌ای در یک روز خشک، چند بار خود را به شلوار کتان شما بمالد، انتقال بار میان موهای گربه و کتان می‌تواند بار اضافی $-۲/۰۰\ \mu C$ را روی شما بر جای گذارد. (الف) چه تعداد الکترون میان شما و گربه منتقل شده است؟ شما به تدریج از طریق کف زمین بی‌بار می‌شوید، ولی اگر به جای اینکه منتظر بمانید، بی‌درنگ به سوی یک شیر آب بروید، ممکن است هنگامی که انگشتان خود را نزدیک شیر آب می‌برید، به طور ناگهانی یک جرقهٔ دردناک ظاهر شود. (ب) در این جرقه، آیا الکترون‌ها از شما به شیر آب حرکت می‌کنند یا برعکس؟ (پ) درست پیش از آنکه جرقه ظاهر شود، آیا شما در شیر آب بار مثبت القا می‌کنید یا بار منفی؟ (ت) اگر به جای شما، گربه پنجه‌اش را به شیر آب برساند، الکترون‌ها در جرقهٔ حاصل به چه طریق حرکت می‌کنند؟ (ث) اگر در یک روز خشک، گربه‌ای را با دست لخت نوازش دهید، باید مواظب باشید انگشتان خود را نزدیک بینی گربه نبرید، وگرنه با جرقه‌ای به آن صدمه می‌زنید. با توجه به اینکه موهای گربه عایق است، توضیح دهید چگونه جرقه می‌تواند رخ دهد؟

حل: (الف) الکترون $\quad n=\frac{q}{e}=\frac{۲/۰۰\times۱۰^{-۶}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۱/۲۵\times۱۰^{۱۳}$

(ب) بار روی بدن L منفی شده و الکترون اضافه دارد که در اتصال با شیر آب این الکترون‌ها به شیر آب منتقل شده و بدن ما خنثی می‌شود.

(پ) وقتی دست با بار منفی به شیر آب نزدیک می‌شود الکترون‌های روی شیر آب دور می‌شوند و لذا می‌توان گفت بار مثبت القا شده است.

(ت) چون بینی گربه مو ندارد یعنی پوشش عایق ندارد لذا احتمال دارد بین دست شما و بینی گربه جرقه بوجود آید.

۵۷- می‌دانیم که بار منفی الکترون و بار مثبت پروتون برابرند. با این حال، فرض کنید مقدار آنها به اندازهٔ ۰/۰۰۰۱۰٪ با یکدیگر تفاوت داشته باشد. دو سکهٔ مسی که به فاصلهٔ $۱/۰\ m$ از هم قرار دارند، با چه نیرویی یکدیگر را می‌رانند؟ فرض کنید هر سکه شامل ۳×۱۰^{۲۲} اتم مس باشد. (*راهنمایی:* اتم مس خنثی دارای ۲۹ پروتون و ۲۹ الکترون است.) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: با توجه به مسئله فرض می‌شود که بار پروتون به اندازه $۱۰^{-۴}$٪ بیشتر از بار الکترون است. در هر اتم حس این اختلاف بار برابر است با:

$$q=۲۹\times۱۰^{-۶}\,e=۴/۶۴\times۱۰^{-۲۴}\ C$$

بار در هر سکه برابر است با

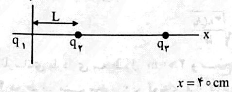
$$Q=(۳\times۱۰^{۲۲})(۴/۶۴\times۱۰^{-۲۴})=۰/۱۳۹C$$

در نتیجه داریم

$$F=k\frac{Q^۲}{r^۲}=(۹\times۱۰^۹)\frac{(۰/۱۳۹)^۲}{(۱)^۲}=۱/۷۴\times۱۰^۸\ N$$

۵۸- در شکل ۱۷-۲۵، ذرهٔ ۱ با بار $-۸۰/۰\mu C$ و ذرهٔ ۲ با بار $+۴۰/۰\mu C$ روی محور x به فاصلهٔ $L=۲۰/۰cm$ ثابت شده‌اند. در صورتی‌که ذرهٔ ۳ (الف) در $x=۴۰/۰cm$ و (ب) در $x=۸۰/۰\ cm$ واقع شده باشد، نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن برحسب بردار یکه چیست؟ اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف ذره‌های ۱ و ۲ برابر با صفر باشد، مختصهٔ (پ) x و (ت) y ذرهٔ ۳ باید چقدر باشد؟

حل:



(الف) $x=۴۰cm$

$$\vec F_۳=\vec F_{۳۱}+\vec F_{۳۲}=(-F_{۳۱}+F_{۳۲})\hat i$$

$$\left[-\frac{(۹\times۱۰^۹)(۲۰\times۱۰^{-۶})(۴۰\times۱۰^{-۶})}{(۰/۴)^۲}+\frac{(۹\times۱۰^۹)(۲۰\times۱۰^{-۶})(۸۰\times۱۰^{-۶})}{(۰/۲)^۲}\right]\hat i$$

$$=۹۰\hat i\,N$$

(ب) $x=۸۰cm$، با روش مشابه و در نظر گرفتن $r_{۳۱}=۰/۸cm$ و $r_{۳۲}=۰/۶cm$، داریم

$$\vec F_۳=-۲/۵\,\hat i$$

(پ) $$\vec F_{۳x}=\left[\frac{kq_۳q_۲}{(x-l)^۲}-\frac{kq_۳q_۱}{x^۲}\right]\hat i=۰\Rightarrow\frac{q_۲}{(x-l)^۲}=\frac{q_۱}{x^۲}$$

$$\frac{۲}{x-۱}=\frac{۲\sqrt۲}{x}\Rightarrow x=۶۸\,cm$$

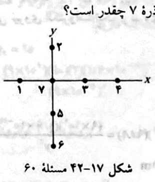
(ت) از نتیجه بالا مشاهده می‌شود که $y=۰$ می‌شود.

۵۹- بار کل $۷۵/۰\ kg$ الکترون برحسب کولن چقدر است؟

حل: الکترون $\quad N=\frac{M}{m_e}=\frac{۷۵}{۹/۱\times۱۰^{-۳۱}}=۸/۲۳\times۱۰^{۳۱}$

$$q=-Ne=-(۸/۲۳\times۱۰^{۳۱})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})=-۱/۳۲\times۱۰^{+۱۳}\ C$$

۶۰- چنانکه در شکل ۱۷-۴۲ دیده می‌شود، شش ذرهٔ باردار، ذرهٔ ۷ را که به فاصله‌های شعاعی $d=۱/۰\ cm$ یا $۲d$ از آنها قرار دارد احاطه کرده‌اند. بارها عبارت‌اند از: $q_۱=+۲e$ ، $q_۲=+۴e$ ، $q_۳=+e$، $q_۴=+۴e$ ، $q_۵=+۲e$ ، $q_۶=+۸e$ ، $q_۷=+۶e$، با $e=۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\ C$. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۷ چقدر است؟



شکل ۱۷-۴۲ مسئلهٔ ۶۰

حل:

$$\vec F_{۷۱}=\frac{k(۶e)(Fe)}{d^۲}\hat i=۱۲\frac{ke^۲}{d^۲}\hat i$$

$$\vec F_{۷۳}=\frac{k(۶e)(e)}{d^۲}(-\hat i)=-۶\frac{ke^۲}{d^۲}\hat i$$

$$\vec F_{۷۴}=\frac{k(۶e)(۴e)}{(۲d)^۲}\hat i=-۶\frac{ke^۲}{d^۲}\hat i$$

$$\vec F_{۷۲}=\frac{k(۶e)(۴e)}{d^۲}\hat j=-۲۴\frac{ke^۲}{d^۲}\hat j$$

$$\vec F_{۷۵}=\frac{k(۶e)(۲e)}{d^۲}\hat j=+۱۲\frac{ke^۲}{d^۲}\hat j$$

$$\vec F_{۷۶}=\frac{k(۶e)(۸e)}{(۲d)^۲}\hat j=۱۲\frac{ke^۲}{d^۲}\hat j$$

$$\vec F_۷=(۱۲-۶-۶)\frac{ke^۲}{d^۲}\hat i+(-۲۴+۱۲+۲)\frac{ke^۲}{d^۲}\hat j=۰$$

۶۱- سه ذرهٔ باردار تشکیل یک مثلث می‌دهند: ذرهٔ ۱ با بار $Q_۱=۸۰/۰\ nC$ در مختصات xy $(۰\,,۳/۰۰\ mm)$ ، ذرهٔ ۲ با بار $Q_۲$ در $(۰,-۳/۰۰\ mm)$ ، و ذرهٔ ۳ با بار $q=۱۸/۰\ nC$ در $(۴/۰۰\ mm,۰)$. برحسب نمادگذاری بردار یکه، نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف دو ذرهٔ دیگر چقدر است، در صورتی که $Q_۲$ برابر با (الف) $۸۰/۰nC$ و (ب) $-۸۰/۰nC$ باشد؟

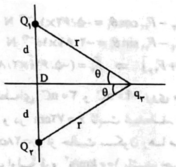
حل:

$$\tan\theta=\frac{d}{D}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\theta=۳۷^\circ$$

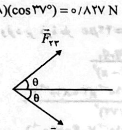
$$r=\sqrt{d^۲+D^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵\,mm$$

$$F_{۱۳}=F_{۲۳}=\frac{kQ_۱q_۳}{r^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۸۰\times۱۰^{-۹})(۱۸\times۱۰^{-۹})}{۲۵\times۱۰^{-۶}}$$

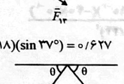
$$=۰/۵۱۸\,N$$



(الف) $F_{۳x}=(۲)(۰/۵۱۸)(\cos ۳۷^\circ)=۰/۸۲۷\ N$

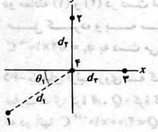


$$F_{۳y}=(۲)(۰/۵۱۸)(\sin ۳۷^\circ)=۰/۶۲۷$$



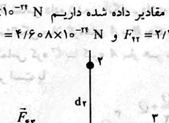
$$\vec F_۳=F_{۳x}\hat i-F_{۳y}\hat j=(۰/۸۲۷\hat i-۰/۶۲۷\hat j)\,N$$

۶۲- در شکل ۱۷-۴۳، (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۴ازطرف سه ذرهٔ دیگر چیست؟ هر چهار ذره در صفحهٔ xy ثابت شده‌اند، و $q_۱=-۳/۲۰\times۱۰^{-۱۹}\ C$، $q_۲=+۳/۲۰\times۱۰^{-۱۹}\ C$، $q_۳=+۶/۴۰\times۱۰^{-۱۹}\ C$، $q_۴=+۳/۲۰\times۱۰^{-۱۹}\ C$، $\theta_۱=۳۵/۰^\circ$، $d_۱=۳/۰۰\ cm$ ، و $d_۲=d_۳=۲/۰۰\ cm$.



شکل ۱۷-۴۳ مسئلهٔ ۶۲

حل: با توجه به مقادیر داده شده داریم $F_{۴۱}=۱/۰۲\times۱۰^{-۲۴}\ N$، $F_{۴۲}=۲/۳۰۴\times۱۰^{-۲۴}\ N$ و $F_{۴۳}=۴/۶۰۸\times۱۰^{-۲۴}\ N$.



$$F_{2x} = -F_{23} - F_{21}\cos\theta_1 = -5.62\times10^{-22}\ \mathrm{N}$$
$$F_{2y} = -F_{23} - F_{21}\sin\theta_1 = -2.89\times10^{-22}\ \mathrm{N}$$
$$\vec{F}_2 = F_{2x}\hat{i} + F_{2y}\hat{j} \ \Rightarrow\ \vec{F}_2 = (-5.62\hat{i}\times2.89\hat{j})\mathrm{N}$$

۶۳- دو بار نقطه‌ای $30\ \mathrm{nC}$ و $-40\ \mathrm{nC}$ روی محور x، به ترتیب در مبدأ و در $x = 72\mathrm{cm}$ ثابت شده‌اند. ذره‌ای با بار $42\,\mu\mathrm{C}$ در $x = 28\mathrm{cm}$ از حالت سکون رها می‌شود. اگر بزرگی شتاب اولیهٔ ذره $100\ \mathrm{km/s^2}$ باشد، جرم ذره چقدر است؟

حل: نیروی خالص وارد بر ذرهٔ بار $q_3 = 42\mu c$

$$F = \frac{kq_3q_1}{d^2} + \frac{kq_3q_2}{(d-x)^2}$$
$$= \frac{(9\times10^9)(42\times10^{-6})(30\times10^{-9})}{(0.72)^2} + \frac{(9\times10^9)(42\times10^{-6})(-40\times10^{-9})}{(0.44)^2}$$
$$= 0.22\mathrm{N}$$

در نتیجه داریم

$$F = ma \ \Rightarrow\ m = \frac{F}{a} = \frac{0.22}{100\times10^3} = 2.2\times10^{-6}\ \mathrm{kg}$$

۶۴- دو کرهٔ باردار مثبت کوچک دارای بار کل $5.0\times10^{-5}\ \mathrm{C}$ هستند. اگر هنگامی که فاصلهٔ دو کره $2.0\ \mathrm{m}$ است، هر کره با نیروی الکتروستاتیکی $1.0\mathrm{N}$ توسط دیگری دفع شود، بار روی کرهٔ با بار کوچکتر چقدر است؟

حل:
$$q_1 + q_2 = 5\times10^{-5}\ \mathrm{c} \qquad (1)$$
$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow q_1q_2 = \frac{Fr^2}{k} = \frac{(1)(4)}{9\times10^9} = 4.44\times10^{-10}\ C^2 \qquad (2)$$

دو معادله (۱) و (۲) در دست است و می‌توان به طور همزمان حل کرده و به سادگی $q_1 = 3.84\times10^{-5}\ \mathrm{C}$ و $q_2 = 1.2\times10^{-5}\ \mathrm{C}$ به دست می‌آید.

۶۵- بارهای اولیه روی سه کرهٔ فلزی مشابه شکل ۱۷-۲۳ عبارت‌اند از: کرهٔ A، Q؛ کرهٔ B، $-Q/4$؛ و کرهٔ C، $Q/2$، که در آنها $Q = 2.00\times10^{-14}\ \mathrm{C}$ است. کره‌های A و B در جای خود ثابت‌اند، و فاصلهٔ مرکز به مرکز آنها $d = 1.20\ \mathrm{m}$ است، که بسیار بزرگتر از اندازهٔ کره‌هاست. کرهٔ C ابتدا به کرهٔ A و سپس به کرهٔ B تماس داده شده و آنگاه برداشته می‌شود. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌های A و B چقدر است؟

حل: پس از تماس کره C با کره A بار هر دو کره یکسان می‌شود و برابر است با

$$q_C = q_A = \frac{\frac{Q}{2} + Q}{2} = \frac{3}{4}Q$$

حال کره C را با کره B تماس داده شود بار هر یک پس از تماس برابر است با

$$q_B = q_C = \frac{-\frac{Q}{4} + \frac{3Q}{4}}{2} = \frac{Q}{4}$$

در نتیجه نیروی بین کره A و کره B برابر است با

$$F = \frac{(9\times10^9)\left(\frac{3Q}{4}\right)\left(\frac{Q}{4}\right)}{(1.2)^2} = 4.7\times10^{-19}\ \mathrm{N}$$

۶۶- الکترونی در نزدیکی سطح زمین در خلأ است و در $y = 0$ روی محور قائم y قرار دارد. الکترون دومی در چه مقداری از y باید قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون اول برابر با نیروی گرانشی وارد بر آن باشد؟

حل: شرط تعادلی نیروی الکترواستاتیک و نیروی گرانش را در نظر می‌گیریم

$$mg = \frac{ke^2}{y^2}$$

لذا داریم

$$(1.67\times10^{-27})(9.8) = \frac{(9\times10^9)(1.6\times10^{-19})^2}{y^2}$$
$$\Rightarrow\ y = 5.1\mathrm{m}$$

۶۷- SSM در شکل ۱۷-۲۵، ذرهٔ ۱ با بار $-5.00q$ و ذرهٔ ۲ با بار $+2.00q$ در فاصلهٔ L روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذرهٔ ۳ با بار نامعلوم q_3 به گونه‌ای قرار داده شود که نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از طرف ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر باشد، مختصهٔ (الف) x و (ب) y ذرهٔ ۳ چه باید باشد؟

حل: **(الف)** نیروها دافعه‌اند و شرط لازم خواهد بود

$$\frac{kq_3q_1}{x^2} = \frac{kq_3q_2}{(x-L)^2}$$
$$\frac{5q}{x^2} = \frac{2q}{(x-L)^2} \ \Rightarrow\ x = 2.72L$$

(ب)
$$y = 0$$

۶۸- دو دانشجوی مهندسی، یکی به جرم $90\ \mathrm{kg}$ و دیگری به جرم $45\ \mathrm{kg}$ به فاصلهٔ $30\ \mathrm{m}$ از یکدیگر قرار دارند. فرض کنید هر یک به اندازهٔ ۰/۰۱٪ در مقدار بار مثبت و منفی عدم توازن دارند، یکی باردار مثبت و دیگری باردار منفی است. با جایگزین کردن هر دانشجو با یک کرهٔ آب که همان جرم دانشجوراداشته باشد، مرتبهٔ بزرگی نیروی جاذبهٔ الکتروستاتیکی میان آنها را بیابید.

حل: بار دانشجویی به جرم $m = 90\mathrm{kg}$ برابر است با:

$$q = (0.0001)\frac{mN_AZe}{M}$$
$$= (0.0001)\frac{(90)(6.02\times10^{23})(18)(1.6\times10^{-19})}{0.018}$$
$$= 8.66\times10^5\ \mathrm{C}$$

بار خالص دانشجوی دوم نصف این مقدار گفته شده است لذا نیروی الکترواستاتیکی بین آنها برابر است با:

$$F = \frac{kq\left(\frac{q}{2}\right)}{d^2} = \frac{(9\times10^9)\left(\frac{1}{2}\right)(5.66\times10^5)^2}{(30)^2}$$
$$= 3.75\times10^{18}\ \mathrm{N}$$

۶۹- در واپاشی پرتوزای معادلهٔ ۱۷-۱۳، یک هستهٔ $^{238}\mathrm{U}$ به $^{234}\mathrm{Th}$ و یک $^{4}\mathrm{He}$ خارج شده تبدیل می‌شود. (این‌ها هسته‌اند نه اتم، در نتیجه الکترون‌ها وارد نشده‌اند.) وقتی فاصلهٔ میان $^{234}\mathrm{Th}$ و $^{4}\mathrm{He}$ برابر $9.0\times10^{-15}\ \mathrm{m}$ است، بزرگی‌های (الف) نیروی الکتروستاتیکی میان آنها و (ب) شتاب ذرهٔ $^{4}\mathrm{He}$ چقدر است؟

حل: **(الف)** هسته هلیوم دارای ۲ پروتون و هستهٔ توریم دارای ۹۰ پروتون است، لذا داریم:

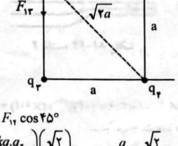
$$q_1 = 90e \qquad q_2 = 2e$$
$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2} = \frac{(9\times10^9)(90)(2)(1.6\times10^{-19})^2}{(9\times10^{-15})^2}$$
$$= 512\ \mathrm{N}$$

(ب) جرم هستهٔ هلیوم از ۲ پروتون و ۲ نوترون تشکیل شده، لذا داریم:

$$\mathrm{F} = \mathrm{ma} \ \Rightarrow\ 512 = (4)(1.67\times10^{-27})\mathrm{a}$$
$$\Rightarrow\ \mathrm{a} = 7.66\times10^{28}\ \mathrm{m/s}$$

۷۰- در شکل ۱۷-۲۴، چهار ذره یک مربع تشکیل داده‌اند. بارها عبارت‌اند از: $q_1 = +Q$، $q_2 = q_3 = q$، و $q_4 = -2.00Q$. اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۱ برابر صفر باشد، نسبت q/Q چقدر است؟

حل: برای اینکه بار q_1 در تعادل باشد، شرط آن این است که q و Q ناهمنام باشند.



$$F_{12} = F_{13} = F_{14}\cos45^\circ$$
$$\frac{kq_1q_2}{a^2} = \left(\frac{kq_1q_4}{(\sqrt{2}a)^2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ \Rightarrow\ \frac{q}{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$